دانستنی‌هایی برای معلم

تاریخچه نسبت، تناسب و درصد

در تاریخ ریاضیات به درستی مشخص نیست که نسبت بین دو مقدار (کمیت)، به وسیلهٔ کدام تمدن باستانی پایه‌گذاری شده است. این فکر که عدّه افراد قبیله‌ای دو برابر عدّه افراد قبیلهٔ دیگر است و این فکر که طول یک تسمهٔ چرمی، نصف طول تسمهٔ چرمی دیگر است، هر دو مفهوم نسبت را در بردارند و می‌توانسته‌اند در آغاز تاریخ هر قومی پدید آیند، با توجه به این نکته، که اولی نسبت بین دو عدد و دومی نسبت بین اندازه‌های دو پاره خط را بیان می‌کند. البته با توجه به شواهد موجود، هنگامی که به ریاضیدان‌های یونان باستان می‌رسیم، می‌بینیم که تالس Thales (ح ۶۴۰ـ۵۴۶ ق م) در حدود ۶ قرن پیش از میلاد مسیح (ع) قضیه‌هایی را که به نام قضیه‌های تالس مشهور است، با استفاده از نسبت پاره‌خط‌ها و تناسب، بیان نموده و اثبات کرده است. اتودوکسوس در هندسه‌اش، نیکو ماخوس در حساب و تاون (تیون) در موسیقی از نسبت استفاده کرده‌اند. اودموس رودسی (حدود ۳۲۵ پ م) را هم مؤلف اثری در مورد تناسب دانسته‌اند که این اثر، به صورت کتاب پنجم اصول اقلیدس در آمد.

از زمان یونانیان تا قرن هفدهم میلادی، نویسندگان در زمینهٔ حساب نظری، مجموعه‌ای از اصطلاح‌ها را در ارتباط با نسبت به کار بردند که از نظر ریاضیدانان امروزی بیش از حد پیچیده بودند. چندتایی از اصطلاح‌ها هنوز باقی است مانند نسبت عددی بین دو مقدار (کمیت) که تفاضل این دو است، به عنوان مثال نسبت عددی ۷ و ۳ مساوی ۴=۳−۷ است. نسبت تساوی a: a مانند ۳ :۳ نسبت کوچک‌تری a: b (وقتی a < b است، مانند نسبت ۴ :۳)، نسبت بزرگ‌تری a: b (وقتی a > b است، مانند نسبت ۳ :۴).

در حال حاضر نسبت عددی بین دو عدد در کتاب‌های درسی مطرح نیست و نسبت‌های تساوی، کوچک‌تری و بزرگ‌تری نیز همگی به عنوان نسبت بین دو مقدار (کمیت) مطرح می‌باشند.

تناسب : نویسندگان قدیم از تناسب عددی، یعنی $b-a=d-c$ به صورت ۵ و ۴ و۳ و ۲ (۲−۳=۴−۵) و از تناسب هندسی یعنی $a:b=c:d$ به صورت ۱۰ و ۵ و ۴ و ۲ ($\frac{۴}{۲}=\frac{۱۰}{۵}$) نام برده و از آنها استفاده کرده‌اند. یونانیان تناسب هماهنگ، یعنی $\frac{۱}{d}-\frac{۱}{c}=\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}$ مانند $a=\frac{۱}{۵}$ ، $b=\frac{۱}{۴}$ ، $c=\frac{۱}{۳}$ و $d=\frac{۱}{۲}$ و چند نوع تناسب دیگر را نیز به آن افزودند. ریاضیدان‌های عهد رنسانس (نوزایی) به حذف اکثر اصطلاح‌های بالا پرداختند و اینک تنها، تناسب هندسی باقی‌مانده است، بنابراین وقتی از تناسب گفتگو می‌شود مراد تناسب هندسی است.

ریاضیدانان مسلمان، تناسب را به صورت

۴	۲
۶	۳

یا $\begin{array}{c|c} ۵ & ۱ \\ ۱۵ & ۳ \end{array}$ نشان داده‌اند.

در حال حاضر در اکثر کتاب‌های درسی مقایسهٔ دو مقدار (کمیت) به وسیلهٔ عمل تقسیم را نسبت بین آن دو مقدار می‌نامند. به بیان دیگر نسبت دو مقدار نشان می‌دهد که یک مقدار چند برابر مقدار دیگر است.

$\frac{a}{b}$ نسبت بین دو کمیت a و b ($b\neq ۰$) است که به یکی از صورت‌های زیر نشان داده می‌شود :

الف) به وسیلهٔ (:)، $a:b$ مانند ۴ :۳

ب) به وسیلهٔ (به)، a به b مانند ۳ به ۴

پ) به وسیلهٔ یک کسر، $\frac{a}{b}$ مانند $\frac{۳}{۴}$

ت) به وسیلهٔ یک عدد اعشاری، مانند ۰/۷۵

ث) به وسیلهٔ یک درصد مانند ٪۷۵

در کتاب درسی حاضر برای نمایش نسبت از کسر استفاده شده است و نسبت عددهای اعشاری و عددهای مخلوط همچنین درصد مرتبط با این عددها مطرح نگردیده است. معلمان محترم نیز به این نکته توجه داشته باشند.

در محاسبهٔ نسبت بین دو مقدار (کمیت) ممکن است :

۱ــ واحدهای آن دو مقدار از یک نوع باشند؛

۲ــ واحدهای آن دو مقدار متفاوت باشند (از یک نوع نباشند)

در فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های این کتاب با هر دو مورد بالا مواجه خواهید شد. در ریاضی مورد ۱ را **نسبت بین دو مقدار**(**Ratio**) و مورد ۲ را **نرخ یا آهنگ** بین دو مقدار (**Rate**) می‌نامند.

در صورتی که در مورد ۲ مخرج کسر ۱ باشد عدد حاصل، **واحد نرخ یا آهنگ** نامیده می‌شود.

اما معلمان محترم باید توجه داشته باشند که در کتاب درسی حاضر ما هیچ نامی از نرخ یا آهنگ نبرده‌ایم و شما نیز نباید نامی از آن را در این مقطع به میان آورید. نام نرخ یا آهنگ در سال ششم ابتدایی خواهد آمد.

ارتباط نسبت با کسر : مفهوم نسبت با مفهوم کسر ارتباط دارد. به عنوان مثال مفاهیم جزء به کل و خارج قسمت هر دو، هم با کسر و هم با نسبت ارتباط دارند؛ این خود دلیل آن است که نسبت و کسر با هم مرتبط هستند یا ارتباط مفهومی دارند. با این حال تفسیر **اندازه** از کسر، ارتباط روشن و مستقیمی با مفهوم نسبت ندارد. برای مثال کسر $\frac{۳}{۴}$ می‌تواند به عنوان یک اندازه [یا متر/ به بزرگی فاصلهٔ $\frac{۳}{۴}$ از مبدأ روی محور اعداد] در نظر گرفته شود؛ در حالی که نسبت ۳ به ۴ به طور مستقیم چنین مفهومی را در برندارد، یا نسبت سه گانه ۱ به ۲ به ۳ [یا نسبت ۱و۲و۳ و یا ۳ :۲ :۱] به طور مستقیم و آشکار در کسر دیده نمی‌شود.

ما از ارتباط مفهوم کسر با نسبت، برای آموزش مفهوم نسبت استفاده می‌کنیم.

نرخ : نسبت دو مقدار (کمیت) با واحدهای متفاوت، نرخ (Rate) نامیده می‌شود مانند :

$\frac{\text{۵۴ صفحه کتاب}}{\text{۳ ساعت}}$ ، $\frac{\text{۳۰۰ کیلوگرم}}{\text{۲۰ سانتیمترمربع}}$ ، $\frac{\text{۲۸۰۰ کیلومتر}}{\text{۴ ساعت}}$ ، $\frac{\text{۶۰۰۰ تومان}}{\text{۵ کیلوگرم}}$. اگر مخرج این نسبت‌ها ۱ باشد،

آن را واحد نرخ می نامند. به عنوان مثال واحد نرخ $\frac{\text{۶۰۰۰ تومان}}{\text{۵ کیلوگرم}}$ ، $\frac{\text{۱۰۰۰تومان}}{\text{۱ کیلوگرم}}$ (کیلویی ۱۰۰۰تومان)

است و یا واحد نرخ $\frac{\text{۲۸۰۰ کیلومتر}}{\text{۴ ساعت}}$ ، $\frac{\text{۷۰۰کیلومتر}}{\text{۱ ساعت}}$ است که آن را به صورت کیلومتر/ساعت ۷۰۰ و یا ۷۰۰Km/h نیز نشان می‌دهند.

به مثال‌های دیگری از نرخ و واحد نرخ توجه فرمایید.

ــ برای خرید برنج به یک برنج فروشی می‌روید و سؤال می‌کنید. نرخ برنج چند است؟ برنج فروش پاسخ می‌دهد «تنی ۵،۰۰۰،۰۰۰ تومان» با توجه به اینکه هر تن ۱۰۰۰ کیلوگرم است.

$\frac{\text{۵،۰۰۰،۰۰۰ تومان}}{\text{۱۰۰۰ کیلوگرم}}$ نرخ اعلام شده برنج است. شما می‌خواهید نرخ ۱ کیلوگرم برنج را بدانید برای این

کار صورت و مخرج $\frac{\text{۵,۰۰۰,۰۰۰ تومان}}{\text{۱۰۰۰ کیلوگرم}}$ را بر ۱۰۰۰ تقسیم می‌کنید به دست می‌آید : $\frac{\text{۵۰۰۰ تومان}}{\text{۱ کیلوگرم}}$
یا ۱ کیلوگرم ۵۰۰۰ تومان که **واحد نرخ** است.

به مثال دیگری توجه کنید.

ــ برای خرید جوراب به بازار رفته‌اید. از جوراب فروش می‌پرسید : نرخ جوراب چند است؟ پاسخ می‌دهد دوجینی ۴۸۰۰ تومان. با توجه به اینکه یک دو جین جوراب ۱۲ جفت جوراب است، او نرخ فروش جوراب را $\frac{\text{۴۸۰۰ تومان}}{\text{۱۲ جفت جوراب}}$ اعلام کرده است، اگر قیمت ۱ جفت جوراب را بخواهید صورت و مخرج نرخ بالا را بر ۱۲ تقسیم می‌کنید. خواهید داشت $\frac{\text{۱۲۰۰ تومان}}{\text{۱ جفت جوراب}}$ که این **واحد نرخ** است.

در زندگی روزمره ما اغلب با واحد نرخ سر و کار داریم. به عنوان مثال وقتی میوه فروش می‌گوید سیب کیلویی (۱ کیلو) ۵۰۰۰ تومان است. او واحد نرخ را بیان کرده است، همچنین وقتی گفته می‌شود قیمت هر سکهٔ بهار آزادی ۸۶۰۰۰۰ تومان است، در واقع واحد نرخ سکهٔ بهار آزادی اعلام شده است در بسیاری از موارد مانند خرید و فروش محصولات کشاورزی، صنعتی، مسافت‌های پیموده شده و زمان صرف شده، فشار بر سطح و... با **نرخ** و یا **واحد نرخ** سرو کار داریم.

نسبت طلایی : یونانیان قدیم، برخی شکل‌ها را خوشایندتر از شکل‌های دیگر می‌دانستند، و در ساختن بناها و مجسمه‌ها و نقاشی‌ها، این شکل‌ها را به کار برده‌اند. مشهورترین این شکل‌ها، مستطیل طلایی است که اضلاعش به نسبت طلایی می‌باشند. (مستطیلی که خوشایندترین مستطیل بین مستطیل‌های با محیط ثابت است). معماران یونان باستان در ۵۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح (ع) از مستطیل طلایی و نسبت طلایی اطلاع داشتند و در ساختن معبد پارتنون Parthenon در آتن، که بنای آن در سال ۴۴۳ پ م آغاز شده بود و برساختن مجموعهٔ بنا و بخصوص مجسمه‌های آن، فیدیاس Phidias مجسمه‌ساز مشهور یونان باستان نظارت داشت، از نسبت طلایی و مستطیل طلایی استفاده کرده‌اند. نسبت طلایی و مستطیل طلایی در کارهای فید یاس نیز دیده می‌شود.

همچنین لئوناردو داوینچی عدد طلایی را در نقاشی و مجسمه‌سازی به کار برده است. هنرمندان ایرانی نیز از نسبت طلایی در ساختن اثرهای باستانی و همچنین هنرهای سنتی، از جمله، خط نستعلیق و خط شکستهٔ نستعلیق استفاده کرده‌اند.

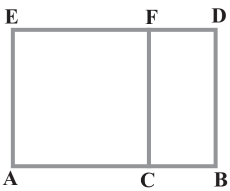
تعریف نسبت طلایی : اگر نقطه‌ای مانند C روی پاره خط AB چنان اختیار شود که $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$ یا $AC^۲=AB.BC$،

یعنی قطعهٔ بزرگ‌تر، واسطه هندسی بین قطعهٔ کوچک‌تر و تمام پاره خط باشد، در این صورت گفته می‌شود که نقطهٔ C پاره خط AB را به نسبت ذات وسط و طرفین، یا به نسبت طلایی تقسیم کرده است. اگر طول پاره‌خط BC برابر ۱ باشد، طول پاره‌خط AC برابر با نسبت طلایی است. فرض می‌کنیم φ مقدار عددی نسبت طلایی را نمایش دهد، در این صورت با فرض $BC=۱$ از تناسب قبل داریم :

$$\frac{\varphi}{۱}=\frac{\varphi+۱}{\varphi}\Rightarrow\varphi^۲=\varphi+۱\Rightarrow\varphi^۲-\varphi-۱=۰\Rightarrow\varphi=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

مقدار مثبت φ یعنی $\varphi=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، مقدار عددی نسبت طلایی است، که آن را عدد طلایی (Golden Number) نیز می‌نامند. البته این عدد گنگ است و یکی از مقدارهای اعشاری تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد. اقلیدس در کتاب پنجم خود به این نسبت اشاره کرده است.

روش رسم مستطیل طلایی : اگر پاره خط AB به وسیلهٔ نقطهٔ C به نسبت طلایی تقسیم شده باشد، یعنی $AC^۲ = AB.BC$ باشد، مستطیل ABDE که درازای آن پاره‌خط AB، و پهنای آن مساوی پاره خط AC است، مستطیل طلایی است.



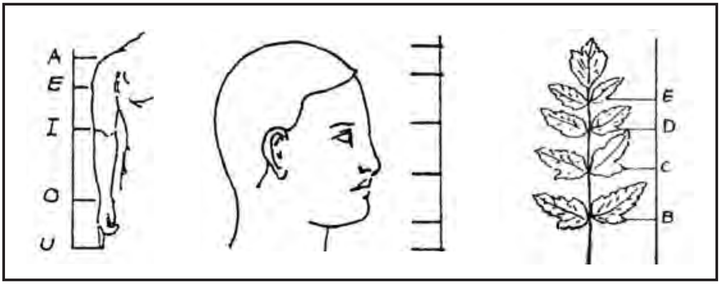
نکاتی بیشتر در مورد نسبت طلایی : تقسیم طلایی، با همهٔ پیچیدگی که در بیان عددی آن وجود دارد، تناسبی است که اغلب در طبیعت و در ساخته‌های دست بشر به آن برخورد می‌کنیم. بدن

آدمی، چه در کل بدن و چه در بعضی از قسمت‌های جداگانهٔ آن، اغلب از قانون تقسیم طلایی پیروی کرده است. اگر تن آدمی را به همین نسبت تقسیم کنیم، به نحوی که قسمت کوچک‌تر پایین و قسمت بزرگ‌تر بالا قرار گیرد، خط تقسیم از انتهای انگشت‌های دست‌ها، در صورتی که دست‌ها آویزان باشند، می‌گذرد.

تقسیم سر به قسمت‌های اختصاصی هم، یک رشته نسبت به دست می‌دهد که خیلی به نسبت طلایی نزدیکند، همین وضع در مورد دست و کف دست هم وجود دارد.

اگر از عالم انسان، به عالم گیاه برویم،در آنجا هم کاربرد شگفت‌آور نسبت طلایی را پیدا می‌کنیم.

وضع قرار گرفتن برگ‌ها را روی یک ساقه بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که بین هر دو زوج برگ، برگ سومی درجای تقسیم طلایی قرار گرفته است.



اگر وضع قرار گرفتن برگ‌ها را روی شاخه‌ها و شاخه‌های جداگانه را روی ساقه مطالعه کنیم، باز هم به نتیجه‌های جالب‌تری می‌رسیم. به سادگی می‌توان متوجه شد که همهٔ برگ‌ها، یکی، روی دیگری قرار نگرفته است، برگ‌های مجاور، اغلب روی یک خط راست نیستند، بلکه شاخه را دور می‌زنند. اگر نخی از پایهٔ یک برگ به پایهٔ برگ دوم، و از آنجا به پایهٔ برگ سوم و غیره به نوبت ببندیم، دیده می‌شود که نخ دور شاخه می‌پیچد و یک مارپیچ واقعی درست می‌کند.